TD numéro 5

Exercice 1. Soient $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace annelé, Y un sous-ensemble de X muni de la topologie induite et $i : Y \hookrightarrow X$ l'inclusion canonique.

1. Montrer que $(Y, i^{-1}\mathcal{O}_X)$ est un espace annelé et que i est alors un morphisme d'espace annelés.
2. Montrer que si X est un schéma et Y un ouvert de X alors $(Y, i^{-1}\mathcal{O}_X)$ est un schéma.

Exercice 2. Soient $(X, \mathcal{O}_X)$ et $(Y, \mathcal{O}_Y)$ des espaces annelés. On considère $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de X et des morphismes d'espaces annelés $f_i : U_i \to Y$ tels que $f_i|_{U_i\cap U_j} = f_j|_{U_i\cap U_j}$ pour tous $i, j \in I$ (les U_i étant munis de la structure d'espace annelé induite).

Montrer qu'il existe un unique morphisme d'espaces annelés $f : X \to Y$ tel que $f|_{U_i} = f_i$.

Exercice 3. *Rappel :* Un morphisme $(f, f^\sharp) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ d'espaces annelés est une *immersion ouverte* si f est l'inclusion d'un sous-espace ouvert X de Y et si $f^\sharp$ est un isomorphisme.

Soit $f : X \to Y$ un morphisme d'espaces annelés. Soit V un ouvert de Y contenant $f(X)$. Montrer qu'il existe un unique morphisme $g : X \to V$ dont la composition avec l'immersion ouverte $i : V \hookrightarrow Y$ (où $i^\sharp : \mathcal{O}_Y \to i_*\mathcal{O}_V = \mathcal{O}_Y|_V$ est l'application de restriction à V) est f.

Exercice 4. Soit X un schéma. Montrer que :

1. Pour tout $x \in X$, on a un morphisme naturel de schémas $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) \to X$ dont l'image du point fermé est x.
2. Pour tout $x \in X$, on a un morphisme naturel de schémas $\mathrm{Spec}(\kappa(x)) \to X$.

Exercice 5. Soit k un corps et $k[\varepsilon] = k[T]/(T^2)$. Montrer qu'un $k[\epsilon]$-point d'un $k-$schéma X équivaut à la donnée d'un $k-$point rationnel x de X et un vecteur tangent en ce point (ou autrement dit un morphisme de $k-$ espaces vectoriels $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 \to k$).

Exercice 6. Soient $\phi : A \to B$ un morphisme d'anneaux, $X = \mathrm{Spec}(B)$, $Y = \mathrm{Spec}(A)$ et $(f, f^\sharp) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ le morphisme d'espaces annelés associé à ϕ.

1. Montrer que si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de A alors les localisés de A et B par $A \setminus \mathfrak{p}$ sont $A_\mathfrak{p}$ et $B \otimes_A A_\mathfrak{p}$.
2. Montrer que ϕ est injectif si et seulement si $f^\sharp$ est injectif.
3. Montrer que si ϕ est surjectif, alors $f^\sharp$ est surjectif.
4. Montrer que si f est un homéomorphisme de Y vers un sous-ensemble fermé de X et $f^\sharp$ est surjectif alors ϕ est surjectif.

Exercice 7. Décrire le groupe des automorphismes du schéma $\mathrm{Spec}(\mathbb{C})$ puis le groupe des $\mathbb{R}-$automorphismes de $\mathrm{Spec}(\mathbb{C})$ vu comme un $\mathbb{R}-$schéma.